电动力学期末偷分宝典

黄 晨

physchenhuang@gmail.com

2021 年 9 月 8 日

内容包括每一章的知识点总结以及典型例题，已包含考试全部可能题型 (当然，不按套路出题就是不可控因素了)。祝各位偷分鱼块!

目录

1 矢量分析

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1}$$

1.1 积规则

- 对梯度

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \tag{2}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} \tag{3}$$

- 对散度

$$\nabla\cdot(f\vec{A}) = f(\nabla\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot(\nabla f) \tag{4}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}) \tag{5}$$

- 对旋度

$$\nabla\times(f\vec{A}) = f(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\times(\nabla f) \tag{6}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) \tag{7}$$

1.2 正交曲面坐标系

直角坐标系

- **梯度**

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z} \tag{8}$$

- **散度**

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{9}$$

- **旋度**

$$\nabla\times\vec{A} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{10}$$

- **Laplace 算子**

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{11}$$

柱坐标系

- **梯度**

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z} \tag{12}$$

- **散度**

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{13}$$

- **旋度**

$$\nabla\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial r}\right)\hat{\phi} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right]\hat{\phi} \tag{14}$$

- **Laplace 算子**

$$\nabla^2 T=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{15}$$

球坐标系

- **梯度**

$$\nabla T=\frac{\partial T}{\partial r}\hat{r}++\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\phi} \tag{16}$$

- **散度**

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \tag{17}$$

- **旋度**

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\hat{\theta}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi} \tag{18}$$

- **Laplace 算子**

$$\nabla^2 T=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2} \tag{19}$$

1.3 二阶微分

- $\nabla\cdot(\nabla T)=\nabla^2 T$
- $\nabla\times(\nabla T)=0$
- $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$
- $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$

1.4 δ 函数

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x=f(a) \tag{20}$$

$$\int_{\text{all space}}f\left(\vec{r}\right)\delta^3\left(\vec{r}-\vec{a}\right)\mathrm{d}\tau=f\left(\vec{a}\right) \tag{21}$$

故有

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)=4\pi\delta^3\left(\vec{r}\right) \tag{22}$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta^3\left(\vec{r}\right) \tag{23}$$

2 电磁现象的普遍规律

2.1 Maxwell 方程组

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f \qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{24}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{25}$$

2.2 介质中的场方程

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \tag{26}$$

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M} \tag{27}$$

对于各向同性介质

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E} \tag{28}$$

$$\vec{B}=\mu\vec{H} \tag{29}$$

$$\rho_p=-\nabla\cdot\vec{P} \tag{30}$$

$$\vec{J}_M=\nabla\times\vec{M} \tag{31}$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{32}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A} \tag{33}$$

欧姆定律

$$\vec{J}_f=\sigma\vec{E} \tag{34}$$

洛伦兹力

$$\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}=\rho\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{35}$$

电荷守恒定律

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{J} \tag{36}$$

2.3 电磁场的能量和动量

能量密度

$$w=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2 \tag{37}$$

能流密度

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H} \tag{38}$$

动量密度

$$\vec{g}=\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} \tag{39}$$

电磁场能量守恒与转换定律

$$\nabla\cdot\vec{S}+\frac{\partial w}{\partial t}=-\vec{J}\cdot\vec{E} \tag{40}$$

2.4 边值关系 ($\hat{n}$ 方向 1→2)

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\sigma_f \qquad \hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0 \tag{41}$$

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0 \qquad \hat{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{\alpha}_f \tag{42}$$

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{P}_2-\vec{P}_1\right)=-\sigma_p \qquad \hat{n}\times\left(\vec{M}_2-\vec{M}_1\right)=\vec{\alpha}_M \tag{43}$$

3 静电场

静电场方程

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{44}$$

引入势函数 φ，令

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \tag{45}$$

电势的 Poisson 方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{46}$$

静电学的基本问题即是求满足给定边界条件的泊松方程的解。

- 电磁学方法
  (1) 直接积分法

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\varepsilon r}\mathrm{d}V' \tag{47}$$

  (2) 高斯定理法

$$\varphi_p = -\int_\infty^p \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} \tag{48}$$

- 电动力学方法
  (1) 分离变量法
  (2) 静电场唯一性定理
  (3) 镜像法
  (4) 格林函数法

3.1 分离变量法

解 Laplace 方程

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{49}$$

通解为

$$\varphi(R,\theta,\phi) = \sum_{n,m}\left(a_{n,m}R^n + \frac{b_{n,m}}{R^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi + \sum_{n,m}\left(c_{n,m}R^n + \frac{d_{n,m}}{R^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)\sin m\phi \tag{50}$$

当体系关于 z 轴旋转对称时，φ 与方位角 ϕ 无关，即

$$\varphi = \sum_n \left(a_nR^n + \frac{b_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \tag{51}$$

其中 $P_n(x)$ 是 Legendre 函数，列出前几项

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \tag{52}$$

边值关系 ($\hat{n}$ 方向由 1 指向 2)

- 两绝缘介质界面
  - 第一类边值关系
$$\hat{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1\big|_s = \varphi_2\big|_s \tag{53}$$
  - 第二类边值关系
$$\hat{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma_f \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\bigg|_s = \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\bigg|_s \tag{54}$$
- 导体与介质分界面
  - 第一类边值关系
$$\varphi|_s = \Phi_0 \ (\text{constant}) \tag{55}$$
  - 第二类边值关系 ($\hat{n}$ 为导体外法向)
$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}\bigg|_s = -\sigma_f \tag{56}$$
  - 给定导体总电荷 Q
$$-\oint \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S = Q \tag{57}$$

(1) 导体内部不带净电荷，电荷只能分布于导体表面上。

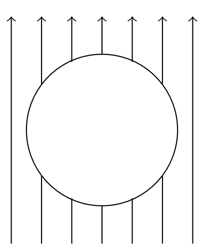
(2) 导体内部电场为 0。

(3) 导体表面上电场必沿法线方向，因此导体为等势面，整个导体的电势相等。

边界条件

- $r \to 0$，φ 有限
- $r \to \infty$
  - 有限场源：$\varphi = 0$
  - 均匀外场：$\varphi = \varphi_0 - E_0 r \cos\theta$

例题 1：半径为 R_0，电容率为 ε 的介质球置于均匀外场 $\vec{E}_0$ 中，求电势。



设放导体球之前球心位置为原点，则

$$\varphi_1 = \sum_n \left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta) \qquad R > R_0 \tag{58}$$

$$\varphi_2 = \sum_n \left(c_n R^n + \frac{d_n}{R^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta) \qquad R < R_0 \tag{59}$$

边界条件

- $R \to \infty$，$\varphi_1 \to -E_0 R\cos\theta = -E_0 R P_1(\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad a_1 = -E_0,\ a_n = 0(n \neq 1)$
- $R = 0$，φ_2 有限 $\quad \Rightarrow \quad d_n = 0$
- 在 $R = R_0$ 处，
$$\varphi_1 = \varphi_2 \qquad\qquad \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \tag{60}$$
则
$$-E_0 R_0 P_1(\cos\theta) + \sum_n \frac{b_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \sum_n c_n R_0^n P_n(\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad -E_0 R_0 + \frac{b_1}{R_0^2} = c_1 R_0 \tag{61}$$
$$-\varepsilon_0 E_0 P_1(\cos\theta) - \varepsilon_0 \sum_n \frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos\theta) = \varepsilon \sum_n n c_n R_0^{n-1} P_n(\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_0 \frac{2b_1}{R_0^3} = \varepsilon c_1 \tag{62}$$
解出
$$b_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 R_0^3 \qquad\qquad c_1 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0$$

电势为
$$\varphi_1 = -E_0 R\cos\theta + \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) E_0 R_0^3 \cos\theta}{(\varepsilon + 2\varepsilon_0) R^2} \qquad\qquad R > R_0 \tag{63}$$
$$\varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 R \qquad\qquad R < R_0 \tag{64}$$

介质的极化强度
$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} 3\varepsilon_0 \vec{E}_0 \tag{65}$$

介质的总电偶极矩
$$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} 4\pi\varepsilon_0 R_0^3 \vec{E}_0 \tag{66}$$

例题 2：半径为 R_0 的接地导体球置于均匀外电场 $\vec{E}_0$ 中，求电势和导体上的面电荷密度。

设放导体球之前球心位置为原点，则球外 $(R > R_0)$ 电势
$$\varphi = \sum_n \left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \tag{67}$$

边界条件

- $R \to \infty$，$\varphi_1 \to -E_0 R\cos\theta = -E_0 R P_1(\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad a_1 = -E_0,\ a_n = 0(n \neq 1)$
- 在 $R = R_0$ 处，
$$\varphi = -E_0 R_0 P_1(\cos\theta) + \sum_n \frac{b_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = E_0 R_0^3,\ b_n = 0(n \neq 1) \tag{68}$$

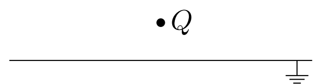
电势为
$$\varphi = -E_0 R\cos\theta + \frac{E_0 R_0^3 \cos\theta}{R^2} \tag{69}$$

导体面上自由面电荷密度
$$\sigma_f = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right|_{R=R_0} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \tag{70}$$

3.2 镜像法

适用于点电荷分布或线电荷分布，对象是导体感应问题。

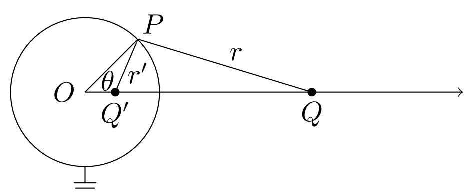
3.2.1 无限大导体平板



$$
\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}-\frac{Q}{r'}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}-\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]
\end{aligned}
\tag{71}
$$

3.2.2 导体球

例题：真空中有一半径为 R_0 的接地导体球，距球心为 $a(a>R_0)$ 处有一点电荷 Q，求空间各点的电势。



导体球接地，球壳上电势为 0，故 P 点

$$\frac{Q}{r}+\frac{Q'}{r'}=0 \tag{72}$$

$$\frac{r'}{r}=-\frac{Q'}{Q}=\text{constant} \tag{73}$$

则 $\Delta\mathrm{OPQ}\sim\Delta\mathrm{OQ'P}$，故有

$$\frac{r'}{r}=-\frac{Q'}{Q}=\frac{R_0}{a}=\frac{b}{R_0} \tag{74}$$

于是镜像电荷

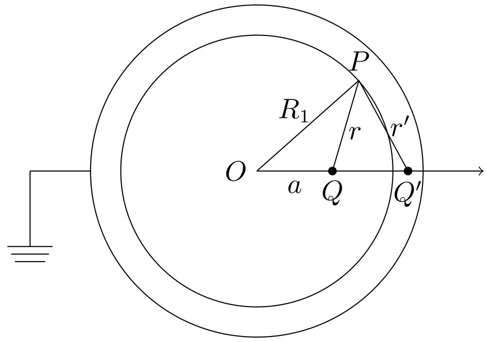
$$Q'=-\frac{R_0}{a}Q \qquad\qquad b=\frac{R_0^2}{a} \tag{75}$$

空间任意一点 P 的电势为

$$
\begin{aligned}
\varphi =&\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}-\frac{R_0}{a}\frac{Q}{r'}\right) \\
=&\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\theta}}-\frac{R_0}{a}\frac{Q}{\sqrt{R^2+b^2-2bR\cos\theta}}\right)
\end{aligned}
\tag{76}
$$

3.2.3 导体球壳

例题：接地的空心导体球内外半径为 R_1 和 R_2，在球内离球心为 $a(a < R_1)$ 处置一点电荷 Q，用镜像法求电势，导体球上的感应电荷有多少?



方法和上题类似，我们可以得到

$$\frac{r'}{r} = -\frac{Q'}{Q} = \frac{R_1}{a} = \frac{b}{R_1} \tag{77}$$

球腔内任意一点 P 的电势为

$$\begin{aligned}\varphi =& \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} - \frac{R_1}{a}\frac{Q}{r'}\right) \\ =& \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\sqrt{R_1^2 + a^2 - 2aR_1\cos\theta}} - \frac{R_1}{a}\frac{Q}{\sqrt{R_1^2 + b^2 - 2bR_1\cos\theta}}\right)\end{aligned} \tag{78}$$

3.3 格林函数法

- 第一类边值问题 $\varphi|_S$

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}', \vec{x})\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V' - \varepsilon_0 \oint_S \varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}', \vec{x})\mathrm{d}S' \tag{79}$$

- 第二类边值问题 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}', \vec{x})\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V' + \varepsilon_0 \oint_S G(\vec{x}', \vec{x})\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\mathrm{d}S' + \langle\varphi\rangle_S \tag{80}$$

3.4 电势的多极展开

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3} + \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}\mathscr{D}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{R} + \cdots\right) \tag{81}$$

- 体系的电荷

$$q = \int_V \rho(\vec{x}')\mathrm{d}V' \tag{82}$$

- 体系的电偶极矩

$$\vec{p} = \int_V \vec{x}'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V' \tag{83}$$

- 体系的电四极矩

$$\mathscr{D}_{ij} = \int_V \left(3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij}\right)\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V' \tag{84}$$

3.5 外场中电荷系统电能量

电荷体系的静电能

$$W = \int \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \mathrm{d}V = \int \frac{1}{2} \rho_f \varphi \mathrm{d}V \tag{85}$$

4 静磁场

4.1 磁矢势

基本方程

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B}=\nabla\times\vec{A} \tag{86}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\mu\vec{J} \tag{87}$$

取库仑规范

$$\nabla\cdot\vec{A}=0 \tag{88}$$

于是

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J} \tag{89}$$

它在无界空间中的解为

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V' \tag{90}$$

矢势边值关系

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{n}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}_2-\nabla\times\vec{A}_1\right)=0 \tag{91}$$

$$\hat{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{\alpha}_f \qquad \Rightarrow \qquad \hat{n}\times\left(\frac{1}{\mu_2}\nabla\times\vec{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\nabla\times\vec{A}_1\right)=\vec{\alpha}_f \tag{92}$$

若该区域内传导电流密度 $\vec{J}_f=0$，则 $\nabla^2\vec{A}=0$，于是

$$\vec{A}_1=\vec{A}_2 \qquad\qquad \hat{n}\times\left(\frac{1}{\mu_2}\nabla\times\vec{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\nabla\times\vec{A}_1\right)=\vec{\alpha}_f \tag{93}$$

4.2 磁标势

条件

(1) 所考虑的空间区域没有传导电流；

(2) 空间应为单连通区域。

方程

在 $\vec{J}=0$ 的区域内，磁场满足方程

$$\nabla\times\vec{H}=0 \qquad\qquad \nabla\cdot\vec{B}=0 \tag{94}$$

又

$$\vec{B}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right) \tag{95}$$

于是

$$\nabla\cdot\vec{H}=-\nabla\cdot\vec{M} \tag{96}$$

设假想磁荷密度

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} \tag{97}$$

于是

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0} \tag{98}$$

引入磁标势 φ_m，使得

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m \tag{99}$$

φ_m 满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 \varphi_m = -\nabla \cdot \vec{H} = -\frac{\rho_m}{\mu_0} \tag{100}$$

当 $\rho_m = 0$ 时，Poisson 方程化为 Laplace 方程，即

$$\nabla^2 \varphi_m = 0 \tag{101}$$

可用分离变量法求解。与静电场的求解方法类似，当体系关于 z 轴旋转对称时，φ 与方位角 ϕ 无关

$$\varphi_m(R, \theta, \phi) = \sum_n \left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \tag{102}$$

边值关系

$$\hat{n} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{n} \cdot (\mu_1 \nabla \varphi_{m1} - \mu_2 \nabla \varphi_{m2}) = 0 \tag{103}$$

$$\hat{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{n} \times (\nabla \varphi_{m1} - \nabla \varphi_{m2}) = 0 \tag{104}$$

即

$$\varphi_{m1}|_S = \varphi_{m2}|_S \qquad \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \tag{105}$$

将 φ_m 代入边值关系中，求出 a_n 和 b_n，由此得到解 $\varphi_m(R, \theta, \phi)$。

例题 1：求磁化矢量为 $\vec{M}_0$ 的均匀铁球产生的磁场

由于铁球是均匀磁化的

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}_0 = 0 \tag{106}$$

因此磁荷只分布在铁球表面，球内磁势 φ_1 和球外磁势 φ_2 都满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \qquad (R < R_0) \tag{107}$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0 \qquad (R > R_0) \tag{108}$$

故 φ_1 和 φ_2 通解

$$\varphi_1 = \sum_n \left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \tag{109}$$

$$\varphi_2 = \sum_n \left(c_n R^n + \frac{d_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \tag{110}$$

定解条件有

(1) 当 $R = 0$ 时，φ_1 有限

(2) 当 $R \to \infty$ 时，$\varphi_2 \to 0$

(3) 在 $R = R_0$ 处，$B_{1R} = B_{2R}$，$H_{1\theta} = H_{2\theta}(\varphi_1 = \varphi_2)$

$$B_{1R} = \mu_0 H_{1R} + \mu_0 M_R = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} + \mu_0 M_0 \cos\theta \tag{111}$$

$$B_{2R} = \mu_0 H_{2R} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \tag{112}$$

由定解条件 (1) 可知，$b_n = 0$；由定解条件 (2) 可知，$c_n = 0$，故

$$\varphi_1 = \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta) \tag{113}$$

$$\varphi_2 = \sum_n \frac{d_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \tag{114}$$

于是

$$B_{1R} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} + \mu_0 M_0 \cos\theta = -\mu_0 \sum_n n a_n R^{n-1} P_n(\cos\theta) + \mu_0 M_0 \cos\theta \tag{115}$$

$$B_{2R} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} = \mu_0 \sum_n \frac{n+1}{R^{n+2}} d_n P_n(\cos\theta) \tag{116}$$

代入条件 (3)，有

$$-\sum_n n a_n R_0^{n-1} P_n(\cos\theta) + M_0 P_1(\cos\theta) = \sum_n \frac{n+1}{R_0^{n+2}} d_n P_n(\cos\theta) \tag{117}$$

$$\sum_n a_n R_0^n P_n(\cos\theta) = \sum_n \frac{d_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos\theta) \tag{118}$$

逐级比较 $P_n(\cos\theta)$ 的系数。当 $n = 1$ 时，

$$\begin{cases} -a_1 + M_0 = \frac{2}{R_0^3} d_1 \\ a_1 R_0 = \frac{d_1}{R_0^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{3} M_0 \qquad d_1 = \frac{1}{3} M_0 R_0^3 \tag{119}$$

当 $n \neq 1$ 时，

$$\begin{cases} -n a_n R_0^{n-1} = \frac{n+1}{R_0^{n+2}} d_n \\ a_n R_0^n = \frac{d_n}{R_0^{n+1}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_n = d_n = 0 \quad (n \neq 1) \tag{120}$$

故

$$\varphi_1 = \frac{1}{3} M_0 R \cos\theta = \frac{1}{3} \vec{M}_0 \cdot \vec{R} \tag{121}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{3} M_0 \frac{R_0^3}{R^2} \cos\theta = \frac{R_0^3}{3} \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{R^3} \tag{122}$$

球内磁场

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1 + \mu_0 \vec{M}_0 = -\mu_0 \nabla \varphi_1 + \mu_0 \vec{M}_0 = -\frac{1}{3} \mu_0 \vec{M}_0 + \mu_0 \vec{M}_0 = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}_0 \tag{123}$$

4.3 磁多极矩

磁偶极矩的场

$$\vec{B}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\vec{m} \cdot \nabla\right) \frac{\vec{R}}{R^3} = -\mu \nabla \varphi_m^{(1)} \tag{124}$$

磁偶极势

$$\varphi_m^{(1)} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{4\pi R^3} \tag{125}$$

5 电磁波的传播

5.1 真空中的波动方程

真空中的 Maxwell 方程组

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{126}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{127}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{128}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{129}$$

真空中的波动方程

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \tag{130}$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} \tag{131}$$

即

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{132}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{133}$$

真空中电磁波的传播速度

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \tag{134}$$

5.2 时谐电磁波

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t} \tag{135}$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t} \tag{136}$$

- 若介质是绝缘体，$\rho_f = 0$，$\vec{J}_f = 0$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0 \qquad \nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = i\omega\mu \vec{H}(\vec{x}) \tag{137}$$

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{x}) = 0 \qquad \nabla \times \vec{H}(\vec{x}) = -i\omega\varepsilon \vec{E}(\vec{x}) \tag{138}$$

- 若介质是导体，$\rho_f = 0$，$\vec{J}_f = \sigma\vec{E}$

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{x}) = 0 \qquad \nabla \times \vec{H}(\vec{x}) = -i\omega\varepsilon \vec{E}(\vec{x}) + \sigma\vec{E}(\vec{x}) \tag{139}$$

亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0 \tag{140}$$

$$\vec{B}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E} \tag{141}$$

5.3 平面电磁波

$$\vec{E}\left(\vec{x}\right)=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \tag{142}$$

平面电磁波的特性

(1) 电磁波为横波，$\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 都与传播方向垂直

$$\vec{k}\cdot\vec{E}=0 \qquad\qquad \vec{k}\cdot\vec{B}=0 \tag{143}$$

(2) $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 互相垂直，$\vec{E}\times\vec{B}$ 沿波矢 $\vec{k}$ 方向

$$\vec{B}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E} \tag{144}$$

(3) $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 同相，振幅比为 v

$$\left|\frac{\vec{E}}{\vec{B}}\right|=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v \tag{145}$$

5.4 真空和均匀绝缘介质内的电磁波

能量密度

$$\omega=\frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2+\frac{B^2}{\mu}\right)=\varepsilon E^2=\frac{B^2}{\mu} \tag{146}$$

$$\langle\omega\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\omega\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\varepsilon\,\mathrm{Re}\left(E^*E\right)=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \tag{147}$$

能流密度

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\hat{e}_k \tag{148}$$

$$\langle\vec{S}\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{S}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\vec{E}^*\times\vec{H}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\hat{e}_k \tag{149}$$

5.5 导体内的电磁波

导体内部的自由电荷分布

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{J}=-\sigma\nabla\cdot\vec{E}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho \tag{150}$$

解得

$$\rho(t)=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \tag{151}$$

衰减的特征时间

$$\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma} \tag{152}$$

因此只要电磁波的频率满足 $\omega\ll\tau^{-1}$，我们就可以认为这是一个良导体，导体内部电荷密度 $\rho=0$。良导体条件

$$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\gg 1 \tag{153}$$

只要电磁波的频率不太高，一般金属都可以看作良导体，良导体内部没有净自由电荷积聚，电荷只能分布于导体表面上。

导体内的电磁波

导体内部 $\rho=0$，$\vec{J}_f=\sigma\vec{E}$，令 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，$\vec{B}=\mu\vec{H}$，Maxwell 方程组为

$$\nabla\cdot\vec{E}=0 \qquad\qquad \nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial H}{\partial t} \tag{154}$$

$$\nabla\cdot\vec{H}=0 \qquad\qquad \nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\sigma\vec{E} \tag{155}$$

对于给定频率 ω 的电磁波，有

$$\nabla\cdot\vec{E}=0 \qquad\qquad \nabla\times\vec{E}=i\omega\mu\vec{H} \tag{156}$$

$$\nabla\cdot\vec{H}=0 \qquad\qquad \nabla\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon\vec{E}+\sigma\vec{E} \tag{157}$$

于是有

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=i\omega\mu\nabla\times\vec{H}=\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}+i\omega\mu\sigma\vec{E}=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E} \tag{158}$$

即

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0 \tag{159}$$

其中

$$k^2=\omega^2\mu\left(\varepsilon+\frac{i\sigma}{\omega}\right) \tag{160}$$

有效电容率

$$\varepsilon'=\varepsilon+\frac{i\sigma}{\omega} \tag{161}$$

Eq.(229) 形式上也有平面波解

$$\vec{E}(\vec{x})=\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{162}$$

由于 k 是复数，故 $\vec{k}$ 是一个复矢量。令

$$\vec{k}=\vec{\beta}+i\vec{\alpha} \tag{163}$$

导体中电磁波表示为

$$\vec{E}=\vec{E}_0e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{r}}e^{i(\vec{\beta}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{164}$$

其中 β 称为相位常数，α 称为衰减常数，二者满足一定关系。

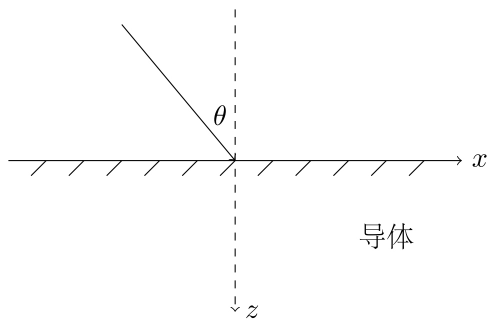
$$k^2=\beta^2-\alpha^2+i2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \tag{165}$$

故

$$\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon \tag{166}$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma \tag{167}$$

趋肤效应和穿透深度



入射波

$$\vec{k}_i=k\sin\theta\hat{x}+k\cos\theta\hat{z} \tag{168}$$

透射波

$$\vec{k}=\vec{\beta}+i\vec{\alpha}=(\beta_x+i\alpha_x)\,\hat{x}+(\beta_z+i\alpha_z)\,\hat{z} \tag{169}$$

根据波矢匹配条件

$$\beta_x+i\alpha_x=k\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_x=0 \qquad \beta_x=k\sin\theta \tag{170}$$

根据 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 的关系

$$\beta_x^2+\beta_z^2-\alpha_x^2-\alpha_z^2=\omega^2\mu\varepsilon \tag{171}$$

$$\alpha_x\beta_x+\alpha_z\beta_z=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma \tag{172}$$

若满足良导体条件 $\sigma/\varepsilon\omega\gg 1$，则有

$$\frac{\mathrm{Re}(k^2)}{\mathrm{Im}(k^2)}=\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}\ll 1 \tag{173}$$

故可忽略 k^2 实部

$$k^2\approx i\omega\mu\sigma \tag{174}$$

$$k\approx\sqrt{i\omega\mu\sigma}\approx\beta+i\alpha \tag{175}$$

得到

$$\alpha\approx\beta\approx\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{176}$$

穿透深度

$$\delta=\frac{1}{\alpha}\approx\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{177}$$

对于高频电磁波，δ 很小，电磁场以及和它相互作用的高频电流仅集中于表面很薄一层内，这种现象称为**趋肤效应**。

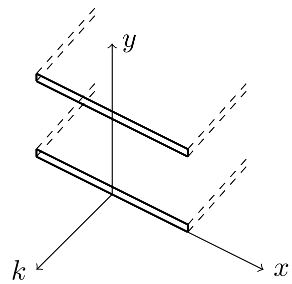
5.6 谐振腔和波导

理想导体的边界条件

在导体表面上，电场线与界面正交，磁感应线与界面相切，即

$$\frac{\partial E_n}{\partial n} = 0 \qquad H_n = 0 \tag{178}$$

例题：证明两平行无穷大导体平面之间可以传播一种偏振的 TEM 电磁波。



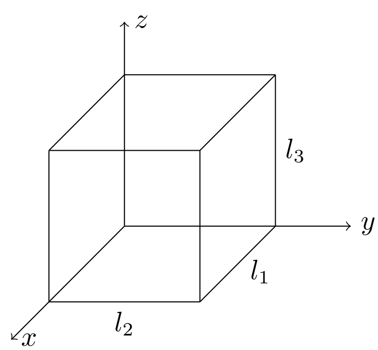
设两导体板与 y 轴垂直，两导体平面上的边界条件为

$$E_x = E_z = 0 \qquad H_y = 0 \tag{179}$$

$$\frac{\partial E_y}{y} = 0 \qquad \frac{\partial H_x}{x} = \frac{\partial H_z}{z} = 0 \tag{180}$$

因此沿 z 轴传播的电磁波，电场沿 y 轴方向偏振，磁场沿 x 轴方向偏振，只能传播一种偏振的 TEM 电磁波。

5.6.1 矩形谐振腔



边长分别为 l_1，l_2，l_3，以金属为边界面的矩形谐振腔内，电磁波的电场和磁场的任一分量 $u(x,y,z)$ 都满足 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{181}$$

分离变量

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{182}$$

Eq.(181) 分解为三个常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + k_x^2 X = 0 \tag{183}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} + k_y^2 Y = 0 \tag{184}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2 Z=0 \tag{185}$$

得到

$$u(x,y,z)=\left(C_1\cos k_x x+D_1\sin k_x x\right)\left(C_2\cos k_y y+D_2\sin k_y y\right)\left(C_3\cos k_z z+D_3\sin k_z z\right) \tag{186}$$

边界条件

- 在 $x=0,l_1$ 处
$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0 \qquad E_y=E_z=0 \tag{187}$$
- 在 $y=0,l_2$ 处
$$\frac{\partial E_y}{\partial y}=0 \qquad E_z=E_x=0 \tag{188}$$
- 在 $z=0,l_3$ 处
$$\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \qquad E_x=E_y=0 \tag{189}$$

于是得到

$$E_x=A_1\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)e^{-i\omega t} \tag{190}$$

$$E_y=A_2\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)e^{-i\omega t} \tag{191}$$

$$E_z=A_3\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)e^{-i\omega t} \tag{192}$$

其中

$$k_x=\frac{m\pi}{l_1} \qquad k_y=\frac{n\pi}{l_2} \qquad k_z=\frac{p\pi}{l_3} \qquad (m,n=0,1,2,\cdots) \tag{193}$$

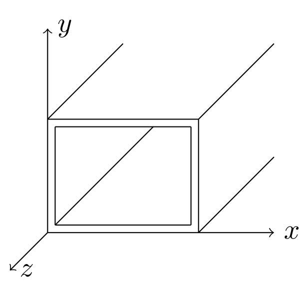
由 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ 可得到以下关系

$$k_x A_1+k_y A_2+k_z A_3=0 \tag{194}$$

本征频率

$$\omega_{mnp}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n}{l_2}\right)^2+\left(\frac{p}{l_3}\right)^2} \tag{195}$$

5.6.2 矩形波导



在截面边长为 a 和 b，以金属为管壁的矩形波导内，电磁波沿 z 方向传播。边界条件

- 在 $x=0,a$ 处
$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0 \qquad E_y=0 \tag{196}$$
- 在 $y=0,b$ 处
$$\frac{\partial E_y}{\partial y}=0 \qquad E_x=0 \tag{197}$$

于是

$$E_x = A_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \tag{198}$$

$$E_y = A_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \tag{199}$$

$$E_z = A_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \tag{200}$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \qquad k_y = \frac{n\pi}{a} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{201}$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{202}$$

由 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 可得到以下关系

$$A_1 k_x + A_2 k_y - i A_3 k_z = 0 \tag{203}$$

最低频率 (截止频率)

$$\omega_{c,mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \tag{204}$$

若 $a > b$，则 TE_{10} 波有最低截止频率

$$f_{c,10} = \frac{\omega_{c,10}}{2\pi} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{205}$$

由 $\vec{B} = -\frac{i\mu}{\omega} \nabla \times \vec{E}$ 可以得到

$$B_x = -\frac{i\mu}{\omega}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -\frac{i\mu}{\omega}\left(k_y A_3 - i k_z A_2\right) \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \tag{206}$$

$$B_y = -\frac{i\mu}{\omega}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = -\frac{i\mu}{\omega}\left(i k_z A_1 - i k_x A_3\right) \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \tag{207}$$

$$B_z = -\frac{i\mu}{\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\frac{i\mu}{\omega}\left(k_x A_2 - k_y A_1\right) \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \tag{208}$$

电磁波模式

按照沿电磁波传播方向 (z 方向) 是否存在电磁场分量将电磁波分为

- **TEM 模式**：电场和磁场都垂直于传播方向，即 $E_z = 0, H_z = 0$
- **TE 模式**：电场方向垂直于传播方向，即 $E_z = 0$
- **TM 模式**：磁场方向垂直于传播方向，即 $B_z = 0$

色散关系

$$\omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\omega_{c,mn}^2 + k_z^2 c^2} \tag{209}$$

相速度

$$v_p = \frac{\omega}{k_z} = c\left(1 - \frac{\omega_{c,mn}^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}} > c \tag{210}$$

群速度

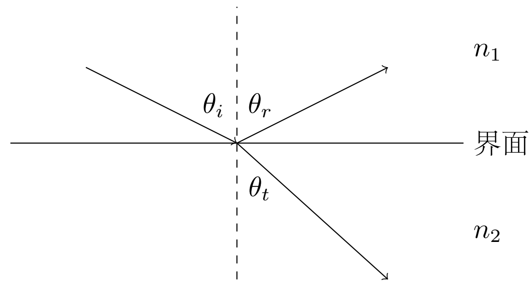
$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z} = c^2 \frac{k_z}{\omega} = \frac{c^2}{v_p} < c \tag{211}$$

5.7 电磁波在介质界面上的反射和折射

(1) 入射角、反射角和折射角的关系

(2) 入射波、反射波和折射波的振幅比和相对相位

反射和折射定律：Snell 定律



$$\theta_i = \theta_r \tag{212}$$

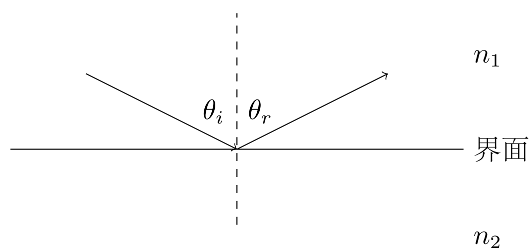
$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \tag{213}$$

振幅关系：Fresnell 定律

$$\frac{E_r^{\perp}}{E_i^{\perp}} = \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \qquad \frac{E_t^{\perp}}{E_i^{\perp}} = \frac{2\cos\theta_i \sin\theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \tag{214}$$

$$\frac{E_r^{\parallel}}{E_i^{\parallel}} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \qquad \frac{E_t^{\parallel}}{E_i^{\parallel}} = \frac{2\cos\theta_i \sin\theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} \tag{215}$$

全反射



全反射，临界角 θ_c 满足

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \tag{216}$$

透射深度 $\sim \kappa^{-1}$

$$\kappa^{-1} = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}} = \frac{\lambda_1}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}} \tag{217}$$

6 电磁波的辐射

6.1 电磁势与规范变化

真空中 Maxwell 方程组

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\tag{218}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0\qquad\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\tag{219}$$

可用矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 描述电磁场

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\qquad\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\tag{220}$$

$(\vec{E},\vec{B})$ 是客观实在的物理量，而 $(\varphi,\vec{A})$ 是人为主观构造的，故可以进行选择，当 $(\varphi,\vec{A})$ 进行如下变换

$$\vec{A}\to\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\psi\qquad\varphi\to\varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}\tag{221}$$

时，$(\vec{E},\vec{B})$ 保持不变，则 Eq.(221) 称为规范变化。规范变化有很多种选择，对于每一种选择称为一种规范。应用最广的是以下两种规范:

(1) **库仑规范**

$$\nabla\cdot\vec{A}=0\tag{222}$$

代入 Maxwell 方程组可以得到

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=-\mu_0\vec{J}\tag{223}$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\tag{224}$$

此时 $\vec{E}$ 的横场部分 (无散场) 由 $\vec{A}$ 描述，纵场部分 (无旋场) 由 φ 描述。

(2) **洛伦兹规范**

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\tag{225}$$

代入 Maxwell 方程组可以得到 d'Alembert 方程

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}\tag{226}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\tag{227}$$

这组方程表现出对称性，电荷产生标势波动，电流产生矢势波动。

6.2 推迟势和辐射场

接下来我们求解 d'Alembert 方程

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\tag{228}$$

设原点处有一假想变化电荷 $Q(t)$，密度为 $\rho(\vec{x},t)=Q(t)\delta(\vec{x})$，则

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}) \tag{229}$$

猜测其解为

$$\varphi(r,t)=\frac{Q\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}) \tag{230}$$

代入 Eq.(229)，得到

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{Q\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{231}$$

只能在 $r=0$ 处不为 0。作一半径为 η 的小球包围在原点，$\eta\to 0$

$$\int_0^\eta 4\pi r^2\mathrm{d}r\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{Q\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}\approx\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V=\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}(-4\pi)=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0} \tag{232}$$

根据 δ 函数的定义得到

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{Q\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}) \tag{233}$$

故

$$\varphi(r,t)=\frac{Q\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}) \tag{234}$$

为方程的解。同理，得到另一个 d'Alembert 方程的解。d'Alembert 方程的解为**推迟势**

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}\left(\vec{x}',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V' \tag{235}$$

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho\left(\vec{x}',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V' \tag{236}$$

当 ρ 和 $\vec{J}$ 给定后，可以计算出势，再由

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\qquad\qquad\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{237}$$

可以求得空间任意点的电磁场强度。

6.3 辐射场的多级展开

当 $\vec{J}$ 和 ρ 以角频率 ω 振动时

$$\vec{J}(\vec{x}',t)=\vec{J}(\vec{x}')e^{-i\omega t}\qquad\qquad\rho(\vec{x}',t)=\rho(\vec{x})e^{-i\omega t} \tag{238}$$

于是

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t'}\qquad\qquad\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{ikr}}{r}\mathrm{d}V' \tag{239}$$

相因子 e^{ikr} 表示波从源点传至场点时，相位滞后了 $\phi=kr=\frac{2\pi r}{\lambda}$。任意点的场强为

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\qquad\qquad\vec{E}=\frac{ic}{k}\nabla\times\vec{B} \tag{240}$$

电磁场在如下三个区域中有不同的特点

(1) 近区 $r\ll\lambda$，此时 $\phi\to 0$，推迟效应可忽略。

(2) 远区 $r \gg \lambda$，此时 $\phi \gg 1$，$r \approx R - \hat{e}_R \cdot \vec{x}'$

$$\vec{A}(\vec{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') e^{ik(R-\hat{e}_R\cdot\vec{x}')}}{R} \mathrm{d}V' = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \left(1 - ik\hat{e}_R \cdot \vec{x}' + \cdots\right) \mathrm{d}V' \tag{241}$$

此处主要为横向的辐射场 (TE 波和 TM 波)

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \approx ik\hat{e}_R \times \vec{A} \tag{242}$$

$$\vec{E} = \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B} = c\vec{B} \times \hat{e}_R \tag{243}$$

(3) 感应区 $r \sim \lambda$，似稳场与辐射场的过渡区域。

电偶极辐射 (必考)

关注展开式第一项

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \mathrm{d}V' \tag{244}$$

其中电流密度

$$\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \tag{245}$$

电流

$$\int_V \vec{J}(\vec{x}') \mathrm{d}V' = \sum q\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum q\vec{x} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{p}} \tag{246}$$

故展开式第一项可以写成

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\vec{p}} \tag{247}$$

这是电偶极矩产生的辐射。

$$\nabla \to ik\hat{e}_R \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$

由此得到辐射场

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = ik\hat{e}_R \times \vec{A} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} \left(\ddot{\vec{p}} \times \hat{e}_R\right) \tag{248}$$

$$\vec{E} = \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B} = c\vec{B} \times \hat{e}_R = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R} \left(\ddot{\vec{p}} \times \hat{e}_R\right) \times \hat{e}_R \tag{249}$$

若取球坐标原点在电荷分布区内，并以 $\vec{p}$ 方向为极轴，则 $\vec{B}$ 沿纬线上震荡，$\vec{E}$ 沿经线上震荡。

$$\vec{B} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon c^3 R} \ddot{p} \sin\theta \hat{e}_\phi \tag{250}$$

$$\vec{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon c^2 R} \ddot{p} \sin\theta \hat{e}_\theta \tag{251}$$

平均辐射能流

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(\vec{E}^* \times \vec{H}\right) = \frac{|\ddot{p}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 R^2} \sin^2\theta \hat{e}_R \tag{252}$$

将平均辐射能流对球面进行积分即可得到辐射功率

$$P = \oint \langle S \rangle R^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{|\ddot{p}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \oint \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3} \tag{253}$$

磁偶极辐射

$$\vec{A}=\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\hat{e}_R\times\vec{m} \tag{254}$$

$$\vec{B}=ik\hat{e}_R\times\vec{A}=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R}\left(\ddot{\vec{m}}\times\hat{e}_R\right)\times\hat{e}_R \tag{255}$$

$$\vec{E}=c\vec{B}\times\hat{e_R}=-\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi cR}\ddot{\vec{m}}\times\hat{e}_R \tag{256}$$

6.4 天线辐射

短天线 ($l\ll\lambda$) 辐射 (电偶极)

$$I(z)=I_0\left(1-\frac{2}{l}|z|\right)\qquad\qquad |z|\leq\frac{l}{2} \tag{257}$$

电偶极矩变化率

$$\dot{\vec{p}}=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\vec{I}(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}I_0\vec{l} \tag{258}$$

则

$$\ddot{\vec{p}}=-i\omega\dot{\vec{p}} \tag{259}$$

辐射功率

$$P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}==\frac{\mu_0 I_0^2\omega^2 l^2}{48\pi c}=\frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}I_0^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{2}R_r I_0^2 \tag{260}$$

7 狭义相对论

7.1 相对论的基本原理和时空理论

狭义相对论的基本假设

- **相对性原理**：物理定律在所有惯性系都有相同的形式。
- **光速不变原理**：真空中的光速在所有惯性系沿任何方向都是常量 c，与光源的运动无关。

间隔不变性

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \tag{261}$$

$$s'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \tag{262}$$

对于任意两个惯性系，有

$$s'^2 = s^2 \tag{263}$$

洛伦兹变换

设惯性系 Σ' 以速度 v 沿惯性系 Σ 的 x 轴正向运动，$t = t' = 0$ 时两参考系重合，则

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z \tag{264}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{265}$$

因果律与相互作用的最大传播速度

真空中的光速 c 是自然界一切相互作用传播速度的极限。

间隔分类

- 类时间隔 $s^2 > 0$
  - 绝对未来：P 在 O 的上半光锥内
  - 绝对过去：P 在 O 的下半光锥内
- 类光间隔 $s^2 = 0$
- 类空间隔 $s^2 < 0$：P 与 O 绝无联系

时钟延缓效应

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{266}$$

尺度缩短效应

$$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{267}$$

速度变换

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \qquad u'_y = \frac{u_y}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad u'_z = \frac{u_z}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{268}$$

7.2 电动力学的相对论协变性

协变性

：物理规律在任意惯性系中可表示为相同形式。

物理规律的协变性

：设方程具有形式

$$F_\mu = G_\mu \tag{269}$$

在参考系变换

$$F'_\mu = a_{\mu\nu}F_\nu \qquad G'_\mu = a_{\mu\nu}G_\nu \tag{270}$$

下，方程

$$F'_\mu = G'_\mu \tag{271}$$

仍然成立。

四维速度矢量

$$U_\mu = \gamma_\mu(u_x, u_y, u_z, ic) = \gamma_\mu(\vec{u}, ic) \tag{272}$$

四维空间矢量

$$x_\mu = (\vec{x}, ict) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{273}$$

当 Σ' 系以速度 v 沿 Σ 系的 x_1 轴运动时，洛伦兹变换可以表示为

$$x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu \qquad (\mu, \nu = 1,2,3,4) \tag{274}$$

a 为沿 x_1 方向的 Lorentz 变换矩阵

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{275}$$

其中

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{276}$$

四维电流密度矢量

带电粒子的电荷 Q 与运动速度无关，故电荷 Q 是一个洛伦兹标量，是一个不变量

$$Q=\int \rho \mathrm{d}V=\int \rho\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\mathrm{d}V_0 \tag{277}$$

故

$$\rho=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\gamma_u\rho_0 \tag{278}$$

电流密度

$$\vec{J}=\rho\vec{u}=\gamma_u\rho_0\vec{u} \tag{279}$$

故四维电流密度矢量

$$J_\mu=\left(\vec{J},ic\rho\right) \tag{280}$$

电流守恒定律

$$\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{281}$$

用四维矢量可以表示为

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0 \tag{282}$$

四维势矢量

用势表示的电动力学基本方程组在洛伦兹规范下为

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J} \tag{283}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{284}$$

洛伦兹规范条件为

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \tag{285}$$

引入微分算符 $\Box$

$$\Box=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} \tag{286}$$

则可以写出四维势矢量

$$A_\mu=\left(\vec{A},\frac{i}{c}\varphi\right) \tag{287}$$

洛伦最规范下的电动力学基本方程组可表示为

$$\Box A_\mu=-\mu_0 J_\mu \tag{288}$$

洛伦兹规范条件可以写成

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0 \tag{289}$$

在参考系变换下，四维势按矢量变换

$$A'_\mu=a_{\mu\nu}A_\nu \tag{290}$$

若 Σ' 以相对于 Σ 沿 x 方向以速度 v 运动，则

$$A'_x = \gamma\left(A_x - \frac{v}{c^2}\varphi\right) \tag{291}$$

$$A'_y = A_y \tag{292}$$

$$A'_z = A_z \tag{293}$$

$$\varphi' = \gamma(\varphi - vA_x) \tag{294}$$

电磁场反对称张量

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{295}$$

可以写出 Maxwell 方程组的协变形式

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 \vec{J}_\mu \tag{296}$$

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{297}$$

电磁场张量

用指标收缩构造洛伦兹不变量

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = B^2 - \frac{1}{c^2}E^2 \tag{298}$$

7.3 相对论力学

能量-动量四维矢量

四维动量矢量

$$p_\mu = m_0 U_\mu = m_0\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma m_0 \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t} \tag{299}$$

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{300}$$

$$p_4 = ic\gamma m_0 = \frac{i}{c}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{301}$$

$$p_\mu = \left(\vec{p}, \frac{i}{c}W\right) \tag{302}$$

$$W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{303}$$

质能关系

$$\Delta W = (\Delta M)\, c^2 \tag{304}$$